



Bulanık Doğrusal Programlama ile Süt Ürünleri İşletmesinde Bir Uygulama*

Osman Çevik¹

Yasemin Yıldırım²

¹Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi İİBF, İşletme Bölümü

²Gaziosmanpaşa Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü

Özet

Güncel hayattaki karmaşıklıklar, belirsizlik ve bilgi eksikliklerini beraberinde getirmektedir. Bu durum insan yaşamında olduğu kadar organizasyonlar için de böyledir. Karar alma süreçlerinde var olan bu belirsizlik durumları, klasik mantıkla çözümlenmek istendiğinde objektif bir sonuç elde edilememektedir. 1965 yılında Zadeh tarafından ortaya atılan bulanık küme teorisi ile bu belirsizlik ve bilgi eksikliklerinin yol açtığı karmaşıklığa çözüm getirilmeye çalışılmıştır. Buna bağlı olarak da amaç ve kısıtlarında bir takım ihlaller içerebilecek şekilde tasarlanan bulanık doğrusal programlama geliştirilmiştir. Burada amaç, belirsizliklerin ve bilgi eksikliklerinin olduğu durumlarda, daha hızlı ve esnek çözümler üretirek en doğru kararın verilmesini sağlamaktır.

Bahsedilen amaçtan hareketle bu çalışmada, süt ürünleri imalatı yapan bir işletmenin verileri kullanılarak bulanık doğrusal programlama modeli oluşturulmuştur. Modelin çözümü, bulanık doğrusal programlama yaklaşımlarından biri olan Werners yaklaşımı ile gerçekleştirilmiştir. Çözüm sonucunda, işletmenin günlük karını maksimum kılabilmesi için, bulanık üretim kapasitesi, bulanık hammadde miktarı ve bulanık toplam iş gücü miktarlarına göre günde 1500 gramlık vakumlu yoğurttan 657 adet, 15000 gramlık köy tipi peynirden 59 adet, 200 gramlık ayrandan 30 adet üretmesi gerektiği, bunun sonucunda da firmanın günlük maksimum karının 836,306 TL olacağı belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Mantık, Bulanık Kümeler, Bulanık Sayılar, Bulanık Doğrusal Programlama

An Application in Milk Products Factory with Fuzzy Linear Programming

Abstract

Complicacy of daily life leads to some ambiguities and lack of knowledge. These situation, in human life is the same as in organizations. When the ambiguities situations that exist during the decision-making process are wanted to be solved with classical logic can not be achieved an objective result. These ambiguities situations and complexities caused by lack of knowledges were tried to be solved with fuzzy sets theory was suggested by Zadeh, in 1965. Depending on that, fuzzy linear programming is developed in a way that objectives and constraints had some violations. The main aim of this study is to make the best decision when the look of information and uncertainty exists by generating faster and more flexible solutions.

In this study, datas of a milk factory were analysed and fuzzy linear programming modeling had been formed. Solving of the modeling had been become a reality by using Werners approach in fuzzy linear programming approaches. The result of the solution, according to product capacity, fuzzy raw material and total fuzzy task force quantity, daily 657 units from 1500 g vacuum yogurt, 59 units from 15000 g village cheese, 30 units 200 g ayran must be produced because of making maximum daily profit of the business. Result of this, maximum daily profit of business which has been defined 836,306 TL.

Keywords: Fuzzy Logic, Fuzzy Sets, Fuzzy Numbers, Fuzzy Linear Programming

* Bu makale, Yasemin YILDIRIM'ın Osman ÇEVİK'in danışmanlığında hazırladığı "Bulanık Doğrusal Programlama ve Bir Uygulama" isimli Y. Lisans tezinden özetlenmiştir.

1. GİRİŞ

Gelişen teknoloji ile karmaşıklaşan güncel hayat, belirsizliklerin ve bilgi eksikliğinin var olduğu bir hal almaktadır. Bilgi eksikliği ve belirsizlikler karar alma süreçlerinde subjektif kararlar alınmasına neden olmaktadır. Klasik mantıkta belirsizliklere yer yoktur. Bir şey "var" ya da "yok" tur. Bilgi kesin sınırlar dahilinde değerlendirilir. Dolayısıyla klasik bir doğrusal programlama modelinde amaç ve kısıtlar net olarak belirlenmiş olmalıdır.

Buna karşılık, Bulanık mantıkta bir şeyin "var" ya da "yok" olmasından ziyade "ne kadar var" olduğu önemlidir. Bulanık doğrusal programlamada amaç ve kısıtlar bir takım ihlaller içerebilmektedir. Modelin bir amacı olmayabilir. Amacına ilişkin bilgi sadece sözel

bir ibare olabilir. Klasik mantıkta uygulanan doğrusal programlama yaklaşımının genişletilmiş hali olan bulanık doğrusal programlama modeli, bilgi eksikliği ve belirsizliklerin olduğu durumda en iyi kararın verilmesini sağlayan karar verme yöntemidir. Burada amaç, belirsizliklerin ve bilgi eksikliklerinin olduğu durumlarda, daha hızlı ve esnek çözümler üretirek en doğru kararın verilmesini sağlamaktır.

Bu çalışmada önce bulanık doğrusal programlamaya ilişkin genel bilgiler verilmiş, sonra da süt sektöründe faaliyet gösteren bir işletmede uygulama yapılarak sonuçları değerlendirilmiştir.

2. Literatür Taraması

Bulanık küme teorisinin temelleri Lotfi A. Zadeh tarafından 1965 yılında "Fuzzy Sets" adlı makale ile

atılmıştır. Bulanık doğrusal programlama konusunda ilk çalışma 1970 yılında “Decision Making in a Fuzzy Environment” adlı makale ile yapılmıştır. Bu makalenin yayınlanması ile bulanık ortamda karar verme doğrusal programlama problemlerine uygulanmaya başlamıştır. İlk olarak Zimmerman 1974 yılında klasik doğrusal programlama problemlerine bulanık küme teorisini sunmuştur. Ardından Tanaka, Okuda ve Asai 1974 yılında bulanık kısıtlarda bulanık doğrusal programlamanın bir formülasyonunu öne sürmüş ve bulanık sayılar arasındaki eşitsizlik ilişkilerine dayalı çözümüne ilişkin bir yöntem sunmuştur. Negoita ve Sularia’ nın 1976 yılında yaptıkları çalışmada ise, bulanık amaç fonksiyonunun maksimize edildiği bir karar probleminin klasik bir matematiksel programlama problemine indirgenebileceği gösterilmiştir(Yalçın-Seçme, 2005, 19; Tuş, 2006, 53-54). Zimmerman 1978 yılında bulanık optimizasyonun temellerini oluşturarak çok amaçlı ve doğrusal üyelik fonksiyonlu bir bulanık optimizasyon problemine indirgenebileceğini kanıtlamıştır(Karadayı, 2007, 15). Orlovsky(1978), Yager(1979), Freeling(1980), Dubois ve Prade(1980) bulanık doğrusal programlama konusunda çalışmalar yapmışlardır. Negotia 1981 yılında bulanık katsayılarda doğrusal programlama problemini formüle etmiş ve robust programlama olarak adlandırmıştır(Tuş, 2006, 54; Dubois and Prade, 1980). 1981 yılında Hannan, 1984 yılında Nakamura parçalı üyelik fonksiyonlu bulanık doğrusal programlama problemlerini incelemiştir(Yalçın- Seçme, 2005, 20). Chanas 1983 yılında bulanık doğrusal programlamada parametrik programlamayı kullanmıştır. Tanaka ve Asai 1984 yılında teknoloji matrisi ve amaç fonksiyonu katsayılarını, sağ taraf sabitlerini bulanık sayılar olarak alıp, kısıtları bulanık fonksiyon olarak düşünmüşlerdir. Yine Tanaka ve Asai 1984 yılında amaç fonksiyonuna bir tatmin düzeyi vererek onuda bir kısıt gibi düşünen bir yöntem önermiştir. Carlsson ve Korhonen tarafından 1986 yılında doğrusal programlamadaki tüm katsayıları bulanık olarak ele alan ve parametrik bir çözüm sunan bir yaklaşım önermiştir. Werners 1987 yılında etkileşimli bir model üzerinde çalışmıştır(Paksoy, 2002, 1). Yazenin 1987 yılında, bulanık ve stokastik programlamayı karşılaştırmıştır. 1989 yılında Werners tarafından, amaç ve sınırların bulanık olduğu modellerin çözümünde etkileşimli bir matematiksel model öne sürülmüştür.1989 yılında Delgado, Vergeday ve Vila tarafından bulanık doğrusal programlama problemlerinin çözümü için genel bir model geliştirilmiştir(Yalçın-Seçme, 2005, 20). Luhandjura 1989 yılında bulanık parametrelerle matematiksel programlama problemleri üzerinde çalışmıştır(Hacısalihoğlu-Çelik, 2000, 3). Rommelfanger, Hanuscheck ve Wolf 1989 yılında amaç fonksiyonunda bulanık parametrelerle doğrusal programlama problemlerini çözmek için yeni bir yöntem sunmuştur(Rommelfanger et al, 1989, 31-48). Inuiguchi, Ichihashi ve Kume 1990 yılında parçalı doğrusal üyelik fonksiyonlu bulanık doğrusal programlama problemi için

geliştirdikleri çözüm algoritması ile literatüre katkıda bulunmuşlardır(Yalçın-Seçme, 2005, 20). Tanaka 1991 yılında parametrik bir doğrusal programlama problemi olarak bulanık doğrusal programlama problemini formüle etmiştir(Zhang et al, 2003, 384). 1992 yılında Zhao, Govind ve Fan tarafından simetrik bulanık doğrusal programlama konusu incelenmiştir. Lai ve Hwang’ da 1992 yılında “Bulanık Matematiksel Programlama” isimli kitaplarında bulanık kümeler, bulanık sayılar, bulanık matematiksel programlama ve bulanık sayılarla bulanık doğrusal programlama modellerini incelemiştir(Lai and Hwang, 1994; Yalçın-Seçme, 2005, 20). Inuiguchi ve Sakawa 1994 yılında olabirlikçi doğrusal programlama problemi için en iyi çözümü test eden bir yöntem sunmuştur. Yöntemde gereklilik ve olabirlik ölçümleri kullanılarak olabir ve gerekli optimallikleri tanımlamış ve olabirlikçi amaç fonksiyonu ile doğrusal programlama problemini açıklamıştır(Hacısalihoğlu-Çelik, 2000, 4). Wang 1997 yılında pratik üretim planlama problemlerine uygun matematiksel model için tek bir optimal çözüm bulmak yerine, kabul edilebilir üyelik derecesi ile farklı çözümleri, ağırlıklı eğitim yönünde değişim gösteren bir genetik algoritmayla bulmuştur. Bu çözümler bulanık optimal çözümün dışbükey kesim kümesini oluşturur(Wang, 1997, 61-68). Inuiguchi ve Sakawa 1998 yılında bulanık amaç fonksiyonu ile doğrusal programlama problemlerini yerleştirmede optimalliğin esnekliği ve güçlülüğünü ele almıştır(Inuiguchi and Sakawa, 1998, 21-34). Guu ve Wu tarafından 1999 yılında bulanık doğrusal programlama problemlerinin çözümü ile ilgili önerilen iki aşamalı yaklaşımda, karar verici max-min işlemcisini gerçekleştirebilecek etkin bir çözüm araştırıyorsa, karar vericinin bu isteğini gerçekleştirmek için uygun bir ortam olması halinde otomatik olarak yerine getirileceği ifade edilmektedir(Guu and Wu, 1999, 191-195).

Son zamanlarda da 2000 yılında Tanaka vd. tarafından bulanık doğrusal programlama ile ilgili çalışmalar yapılmıştır(Paksoy, 2002, 1). Chanas ve Zielinski tarafından 2000 yılında amaç fonksiyonu bulanık olan bulanık doğrusal problemlerin çözümü ile ilgili çalışma yapılmıştır(Chanas and Zielinski, 2000, 56-63). Buckley ve Feuring 2000 yılında problemi çok amaçlı doğrusal programlama şekline dönüştürerek problemin baskın olmayan çözümlerinin kümesini incelemek için bulanık esnek programlamadan yararlanmış(Buckley and Feuring, 2000, 35-53). Jamison ve Lodwick 2001 yılında, Chiang 2001 yılında, Liu 2001 yılında bulanık doğrusal programlama ile ilgili çalışma yapmışlardır. Liu, bulanık sayılar için yeni bir sıralama yöntemi önermiştir. Chiang 2001 yılında bulanık doğrusal programlamayı formüle etmek için istatistiksel veri ile istatistiksel güven aralığı kavramını kullanmıştır. Bector ve Chandra 2002 yılında yaptıkları çalışma ile bulanık doğrusal programlamanın teori ve metodolojisine katkıda bulunmuşlardır(Paksoy, 2002, 1; Chiang, 2001, 65-86).

3. Bulanık Mantığın Temel Elemanları ve Kavramları

Bulanık mantık iki anlamda kullanılır. Dar anlamda bulanık mantık, klasik iki değerli mantığın genelleştirilmiş halidir. Geniş anlamda ise bulanık kümeleri kullanan bütün teorileri ve teknolojileri ifade etmektedir (Tuş, 2006, 5)

Bulanık mantıkta temel kavramlardan başta geleni belirsizlik kavramıdır. Bulanık mantık, klasik mantıktan farklı olarak belirsiz ve kesin olmayan kaynaklarla yani bulanık kaynaklarla uğraşan bir tekniktir. Bulanık mantık teorisi, belirsizlik ifade eden neticeleri matematiksel ifadelerle dönüştürür. Diğer bir kavram ise dilsel değişkenlerdir. Dilsel (linguistik) değişkenler, değişken değeri olarak bir dildeki kelimeleri alabilen değişkenlerdir. Örneğin “sıcak” veya “soğuk” gibi kelimelerle ifade edilmektedir. Bulanık mantığı diğer sistemlerden ayıran en önemli özellik dilsel değişkenlerin kullanımına izin vermesidir (Özkan, 2003, 126).

Bulanık mantık, Proses kontrolü, Uzman Sistemler, Robotik, İz Tanıma, Otomatik Kontrol, Karar verme, Üretim Planlama, Yöneylem Araştırması, Optimizasyon, Görüntü Tanımlama, Bilgi Sistemleri gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Uzakdoğu da özellikle Japonya’ da oldukça fazla ilgi gören bulanık mantık yaklaşımının bugüne kadar en fazla uygulandığı alan ise denetim sistemleridir.

Bulanık mantık, belirsiz ve karmaşık sistemlerin çözümüne basit çözümler getirmesi açısından avantajlıdır. Basit bir modelle karmaşık problemler kolaylıkla çözümlenerek daha az maliyetle daha hızlı sonuçlar elde edilmektedir. Ancak üyelik fonksiyonlarının belirlenmesi açısından daha fazla uzmanlık isteyen ve zamana bağlı bir model olması da dezavantajı olarak ifade edilebilir.

4. Bulanık Küme Teorisi

Bulanık küme, üyelik dereceleri kesin olarak belli olmayan fakat aday elemanların kümeye ait olma üyelik derecelerinin bulunduğu bir kümedir (Özkan, 2002, 10). Klasik kümelerde, kümenin bir elemanının üyelik derecesi 1 ise o birim kümenin elemanıdır, 0 ise kümenin elemanı değildir. Bulanık kümelerde üyelik derecesi 0’ dan 1’ e kadar herhangi bir sayıyı alabilir. Bulanık küme teorisini ilk defa ortaya atan Zadeh bulanık kümeyi aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$$\tilde{A} = \{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X \}$$

Bulanık kümelerin, birleşme özelliği, kesişme özelliği, evrik olma özelliği gibi klasik kümelere benzer özellikleri vardır (Aydın, 2007, 64).

Bulanık kümelerle ait bazı temel kavramlar vardır. Bu kavramlar aşağıda kısaca izah edilmiştir.

Destek kümesi, üyelik derecesi sıfırdan büyük olan elemanların bir araya getirildiği kümedir (Dubois and

Prade, 1980, 10). Kernel kümesi, üyelik derecesi 1 olan elemanların oluşturduğu kesin bir kümedir (Özkan, 2002, 24). Bulanık \tilde{A} kümesine sadece kısmi üyeliği olan elemanların yer aldığı kümeye ise sınır kümesi denilmektedir (Ross, 2005, 92). Üyelik derecesi α derecesinden büyük veya eşit olan elemanlardan oluşan küme alfa- α kesim kümesi olarak ifade edilmektedir (Rocacher and Bose, 2005, 319).

Bulanık bir kümenin üyelik fonksiyonunun en büyük üyelik derecesi, bu kümenin yüksekliğini belirler (Özkan, 2003, 39). Yüksekliğin 1’ e eşit olması durumunda \tilde{A} bulanık kümesi normaldir. Boş olmayan her normalin altındaki bulanık kümeler, üyelik derecelerinin her birini en büyük üyelik derecesine bölerek normalleştirilebilir (Bojadziev and Bojadziev, 1995, 114).

Üyelik fonksiyonlarına göre bulanık bir kümenin dışbükeyliği (konveksliği); $x_1, x_2 \in U$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $A \subset R$ kümesi $\mu_{\tilde{A}}[\lambda x_1 + [1-\lambda]x_2] \geq \min [\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)]$ eşitsizliğini sağlıyorsa dışbükeydir şeklinde tanımlanır (Zimmermann, 1991, 15).

Üyelik fonksiyonlarına göre bulanık bir kümenin içbükeyliği (konkavlığı) $x_1, x_2 \in U$ ve $\lambda \in [0,1]$ koşullarında $\mu_{\tilde{A}}[\lambda x_1 + [1-\lambda] x_2] \leq \max [\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)]$ ifadesiyle tanımlanır (Özkan, 2003, 45).

Kardinalite kavramı, \tilde{A} bulanık kümesindeki her bir elemanın üyelik derecelerinin toplanması ile bulunur. Bulanık bir kümeye ilişkin üyelik fonksiyonunun maksimum değeri sonlu bir sayı olduğunda, bulanık bir kümede yer alan üyelik derecelerinin ortalama değeri, bulanık kümelerin merkezini verir (Özkan, 2003, 40-41).

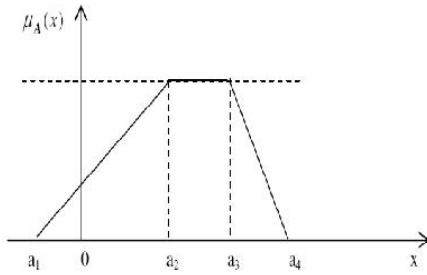
Evrensel küme U da tanımlı olan bulanık bir kümenin α -kesimlere göre açıklamasını sağlayan kurala, bileşenlere ayırma kuralı denir. Betimleme teoremi ise, bulanık bir kümenin α -kesim kümelerine ayrıştırılması ve $\alpha x \tilde{A}_\alpha$ kümelerinin birleşimi olarak düzenlenebilmesini sağlayan bir teoremdir. (Özkan, 2003, 45-46-47).

5. Bulanık Sayılar

Bulanık sayılar; dışbükey, normalleştirilmiş, sınırlı-süreklili üyelik fonksiyonu olan ve gerçel sayılarda tanımlanmış bir bulanık küme olarak ifade edilir (Baykal ve Beyan, 2004, 59).

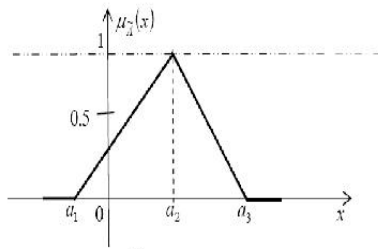
Bulanık sayılar, bulanık kümelerin özel bir alt kümesidir. Bulanık kümelerde geçerli olan birleşim, kesişim, α -kesimi, genişleme kuralı gibi küme teorik işlemleri, bulanık sayılara da kolayca uygulanabilir (Özkan, 2003, 59).

Yamuksal bulanık sayı en sık kullanılan bulanık sayı çeşiti olup, aşağıdaki Şekil 1’deki gibi gösterilir (Tuş, 2006, 33). Burada a_1 ve a_4 parametreleri yamuksal bir bulanık sayının kanat açıklıklarını veya üyelik derecesinin 0 olduğu elemanları göstermektedir. a_2 ve a_3 parametreleri ise, üyelik derecesi 1 olan elemanları yani bu sayının kernel kümesini ifade etmektedir.



Şekil 1: Yamuksal Bulanık Sayı

Üçgensel bir bulanık sayı ise aşağıdaki Şekil 2' deki gibi gösterilir.



Şekil 2: Üçgensel Bulanık Sayı

Burada a_2 parametresi üyelik derecesinin 1'e eşit olduğu noktayı verir. a_1 ve a_3 parametreleri ise, üçgensel bulanık sayının üyelik derecesinin 0 olduğu değerleri veya kanat açıklıklarını göstermektedir (Yalçın-Seçme, 2005, 17).

6. Bulanık Doğrusal Programlama

Bulanık doğrusal programlama, bulanık mantık ve doğrusal programlamanın birleşimi olup, klasik doğrusal programlamanın genişletilmiş halidir. Bulanık doğrusal programlama, doğrusal programlama yöntemi kullanılarak çözümlenebilen problemlere karar süreçlerinde görülen belirsizlik dahil edildiğinde kullanılan bir yöntemdir (Hansen, 1996, 32).

Bulanık doğrusal programlama modelinin en genel hali şöyle formüle edilebilir:

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j \tilde{x}_j$$

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j (\leq, =, \geq) \tilde{b}_i \quad i=1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

Doğrusal programlama modelinden farklı olarak, bulanık doğrusal programlama modelinde bulanıklık simgesi (\sim) konulur (Yalçın-Seçme, 2005, 27).

Burada \tilde{a}_{ij} , \tilde{b}_i , \tilde{c}_j bulanık sayılardır ve x_j değerleri bulanık sayıların ($i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$) halleridir.

6.1. Bulanık Doğrusal Programlamanın Uygulama Alanları

Bulanık doğrusal programlama 1978 yılında Zimmerman tarafından ortaya atıldıktan sonra, problemlerin modellenmesi ve çözümünde yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bulanık doğrusal programlamayı klasik doğrusal programlamanın kullanıldığı her alanda kullanılabilmek mümkündür (Karadayı, 2007, 14).

Bulanık doğrusal programlama tarımsal ekonomiler, atama problemleri, bankacılık ve finans, çevre yönetimi, personel yönetimi, üretim gibi birçok alanda uygulanmıştır.

6.2. Bulanık Ortamda Karar Verme

Bulanık bir ortamda karar verme problemi, klasik bir karar verme problemi gibi altı bileşenle açıklanabilir. Bu bileşenler sırasıyla karar verici, amaç, karar ölçütü, seçenekler, olaylar ve sonuç olarak ifade edilebilir. Burada söz konusu bileşenlerden karar verici ve seçenekler kümesinde herhangi bir bulanıklık olmadığı kabul edilmiştir. Amaç ve karar ölçütü bileşenleri ise aşağıda açıklanan anlamda bulanıklık içerebilir. Karar verici, amaç fonksiyonu için ulaşmak istediği erişim düzeyini bulanık olarak belirleyebilir. Ayrıca karar ölçütünü gösteren kâr veya maliyet fonksiyonuna ilişkin parametre değerleri bulanık sayılarla tanımlanabilir. Söz konusu iki bileşen (amaç ve karar ölçütü bileşeni) bulanık bir hedef olarak ele alınır. Öte yandan, olayları niteleyen kısıtlayıcıların parametre değerleri ve/veya sağ taraf sabitleri bulanık olabilir. Ayrıca kısıtlayıcılarındaki \leq , $=$, \geq ilişkilerinde bazı toleranslara yer verilebilir. Bu bileşen ise kısıtlayıcı olarak ele alınır (Özkan, Fall 2002-2003, 157).

6.3. Bulanık Karar ve Optimal Karar

Bulanık bir karar, verilen hedefler ve/veya kısıtlayıcıların uzlaştırılmasından hareketle belirlenen bulanık bir küme olarak ifade edilir (Bellman and Zadeh, 1970, 164). Başka bir ifade ile bulanık karar, bulanık hedef ve bulanık kısıtlayıcıların bir alt kümesi olup bulanık kısıtlayıcı doyumunun ve bulanık hedef başarımının eşanlı olarak karşılanma derecesini gösterir.

Bulanık karar kümesi, " \tilde{G} hedefine ulaşmak ve \tilde{C} kısıtlayıcısını doyumak" şeklinde ifade edilen bir kurala göre belirlenir. Buna göre bulanık karar kümesi matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır (Özkan, 2003, 157).

$$\tilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}$$

Optimal karar, bulanık kararlar arasında en büyük üyelik derecesi değerine sahip bulanık karardır. Matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir (Tuş, 2006, 71).

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \text{Max } \mu_D, & x \in X \text{ ise} \\ 0 & , \text{ d.d.} \end{cases}$$

6.4. Bulanık Doğrusal Programlamada Max(Min) İşlemcisi

Max(min) işlemcisi, hedef ve kısıtların eşanlı olarak doyurulması esnasında verilecek kararda her iki bulanık kümeyi sağlayacak alternatif üyelik dereceli elemanlardan en yüksek elemanın seçiminin sağlanmasıdır (Yalçın-Seçme, 2005, 117). Herhangi bir bulanık doğrusal programlama problemi için optimal karar saptanırken genelde max(min) işlemcisi kullanılmaktadır (Chanda and Bhattacharjee, 2004, 117).

6.5. Bulanık Doğrusal Programlama Modelleri

Bulanık doğrusal programlama problemlerinin, bulanıklığın ilgili modele nasıl ve nerede girileceği bilgisine göre oluşturulan birçok türü olup literatürde yaygın olarak kullanılan sınıflandırma aşağıdaki gibidir (Özkan, 2003, 164):

- Bulanık kısıtlayıcı doğrusal programlama problemi
- Bulanık amaç fonksiyonlu ve bulanık kısıtlayıcı doğrusal programlama problemi
- Bulanık amaç katsayıları doğrusal programlama problemi
- Bulanık parametrelili doğrusal programlama problemi.

6.6. Bulanık Doğrusal Programlama Problemlerinin Çözüm Yaklaşımları

Bulanık doğrusal programlama problemlerinin çözümlerinde kullanılan değişik yaklaşımlar vardır. Bunlardan en yaygın olarak kullanılanları aşağıda kısaca açıklanmıştır.

6.6.1. Zimmerman Yaklaşımı

Bulanık doğrusal programlama bir karar modeli olarak ilk kez Zimmerman tarafından kullanılmıştır. Zimmerman bu modelde halk seçimleri ve güç sistemlerinin planlanması uygulamalarını yapmıştır (Darby-Dowman et al, 1986, 17). Yine bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcı doğrusal programlama modellerinde, karar vericinin amaç fonksiyonu için hedeflediği seviyeyi ve tolerans miktarını çözüm öncesinde belirleyebildiğini öne sürmüştür. Zimmerman tarafından belirlenen model aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} c^T x &\lesseqgtr b_0 \\ (Ax)_i &\lesseqgtr b_i, \quad \forall i \text{ için} \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Burada \lesseqgtr işareti bulanık bir eşitsizliği ifade eder. Yani \leq işaretinin bulanıklaştırılmış halidir. “Ax in b civarında veya daha az olduğunu gösterir. Aynı şekilde \gtrsim işareti de $c^T x$ in b_0 civarında veya daha fazla olduğunu

gösterir (Özkan, 2003, 167).

Bulanık amaç fonksiyonu ve bulanık kısıtlayıcıların parçalı doğrusal üyelik fonksiyonları sırasıyla aşağıda verildiği gibidir (Özkan, 2003, 168-169)

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 0 & ; \text{ eğer } c^T x \leq b_0 - d_0 \text{ ise} \\ 1 - \frac{b_0 - c^T x}{d_0} & ; \text{ eğer } b_0 - d_0 \leq c^T x \leq b_0 \text{ ise} \\ 1 & ; \text{ eğer } c^T x \geq b_0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0 & ; \text{ eğer } (Ax)_i \geq b_i + d_i \text{ ise} \\ 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{d_i} & ; \text{ eğer } b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + d_i \text{ ise} \\ 1 & ; \text{ eğer } (Ax)_i \leq b_i \text{ ise} \end{cases}$$

Simetrik bulanık doğrusal programlama problemleri ek bir değişken olan λ nın kullanılması halinde bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonlarının modelde yerine konulmasıyla son olarak aşağıdaki hali alır.

Max λ

$$\begin{aligned} &\text{Kısıtlayıcılar} \\ &c^T x \geq b_0 - (1-\lambda)p_0 \\ &(Ax)_i \leq b_i + (1-\lambda)p_i \\ &(Ex)_i \leq b_i; \quad i=1,2,\dots,m \\ &\lambda \in [0,1] \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

6.6.2. Werners Yaklaşımı

Werners'e göre bulanık kısıtlayıcı doğrusal programlama problemleri ile bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcı doğrusal programlama modelleri aynı şekilde çözülebilmektedir.

Werners yaklaşımında kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonları karar verici tarafından belirlenebilmesine rağmen, kısıtlayıcıların bulanık olmasından ötürü, bulanık olarak algılanan amaç fonksiyonuna ilişkin üyelik fonksiyonu, karar verici tarafından önceden belirlenemez. Werners, amaç fonksiyonuna ilişkin üyelik fonksiyonunu belirleyebilmek için Orlovski'nin

önerdiği bulanık karar kümesini baz almıştır. Orlovski, bulanık kısıtlayıcıların oluşturduğu tanım kümesinin her bir α -kesim kümesi için, amaç fonksiyonunun optimal değerlerini belirlemeyi ve bu optimal değerlerle eşit üyelik dereceli olan çözüm uzayının α -kesim kümesini bulanık karar kümesi olarak ele almayı önermiştir (Tuş, 2006, 97)

Werners'in bulanık doğrusal programlama yaklaşımı aşağıdaki gibi modellenir (Özkan, 2003).

$$\begin{aligned} \text{M} \bar{x} Z &= c^T x \\ \text{Kısıtlayıcılar} \\ (Ax)_i &\leq b_i \quad i=1,2,\dots,m \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Optimal değer, Z^0 ve Z^1 arasında değer alacağından, bu aralıkta amaç fonksiyonu için yazılacak üyelik fonksiyonu da sürekli artan doğrusal bir üyelik fonksiyonudur (Yalçın-Seçme, 2005, 47).

Amaç fonksiyonu ve bulanık kısıtların üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{eğer } c^T x > Z^1 \text{ ise} \\ 1 - \frac{Z^1 - c^T x}{Z^1 - Z^0} & ; \text{eğer } Z^0 \leq c^T x \leq Z^1 \text{ ise} \\ 0 & ; \text{eğer } c^T x < Z^0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{eğer } (Ax)_i < b_i \text{ ise} \\ 1 - \frac{(Ax)_i - b_i}{p_i} & ; \text{eğer } b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i \text{ ise} \\ 0 & ; \text{eğer } (Ax)_i > b_i + p_i \text{ ise} \end{cases}$$

Optimal kararın belirlenmesinde max(min) işlemcisi kullanıldığından Werners'in yöntemi simetrik bir yöntemdir. Hem amaç fonksiyonun hem de kısıtların birlikte doyumunu sağlayan bir bulanık doğrusal programlama modelidir. Optimal karara ulaşmak için Bellman ve Zadeh tarafından önerilen min işlemcisi kullanılarak μ_D üyelik fonksiyonu ile belirlenen D karar alanı elde edilebilir:

$$\mu_D = \min(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$$

Werners modelini klasik doğrusal programlama modeline dönüştürmek için, yine l değişkeni kullanılır. μ_D eşitliğinin optimal çözümünün maksimum olduğu kararının seçilmesi halinde eşitlik aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned} \text{Max } \lambda \\ \mu_0 &\geq \lambda \\ \mu_1 &\geq \lambda \end{aligned}$$

$$\lambda, \mu_0 \text{ ve } \mu_i \in [0,1], \forall i \text{ için} \\ x \geq 0$$

6.6.3. Diğer Yaklaşımlar

Chanas, bulanık amaç ve bulanık kısıtlayıcı doğrusal programlama modellerine yeni bir bakış açısı getirmiştir. Karar vericinin hedef seviyesini, herhangi bir bilgi elde etmeden belirlemesinin gerçekçi olmadığını belirtmiştir. Zimmermann yaklaşımından bu noktada ayrılmaktadır. Chanas, simetrik bulanık doğrusal programlama problemlerinin çözümünde parametrik programlamayı temel almıştır (Kaya, 2007, 28; Ural, 2006, 86).

Vergeday yaklaşımında, betimleme teoremi ve parametrik programlamadan yararlanarak; bulanık kısıtlayıcı doğrusal programlama modellerinin çözümü gerçekleştirilmiştir. Vergeday, bulanık kısıtlayıcı bir doğrusal programlama modelinin bulanık çözümünün bulunması için, bulanık kısıtlayıcıların α -kesim kümelerine ayrılması gerektiğini belirtmiştir. (Ural, 2006, 85) Vergeday yaklaşımında parametrik programlama yardımıyla hesaplanan çözümlerden hangisinin bulanık doğrusal programlama probleminin çözümü kabul edileceği, tamamen karar vericiye aittir. (Özkan, 2002, 77).

Carlsson & Korhonen, bulanık parametrik doğrusal programlama modelleri üzerinde durmuştur. Carlsson & Korhonen'e göre; amaç fonksiyonundaki ve kısıtlayıcılardaki değişimler, parametrik programlama ile analiz edilirler (Triantis and Oliver, 1998, 87). Carlsson & Korhonen (1986), Chanas'ın yaklaşımının kısıt ihlal dereceleri arasındaki ödünleşmeyi göz önüne almadığını eleştirmiş ve tam bir ödünleşme yaklaşımı önermişlerdir (Paksoy, 2002, 14).

Wang ve Liang da 2004 yılında yayınladıkları makalelerinde amaç, kısıtlar ve tüm katsayıların bulanıklaştırılarak doğrusal programlama problemlerinin çözüleceği yaklaşımını savunmuşlardır (Wang and Liang, 2004, 17-41).

7. Bir Süt Ürünleri Fabrikasında Bulanık Doğrusal Programlama Uygulaması

Bu bölümde öncelikle araştırmanın amacı, önemi, sınırlılıkları ve veri toplama sürecine kısaca değinilmiş, sonra oluşturulan modelde kullanılan değişkenler ve bunlara ilişkin veriler tablolar halinde sunulmuştur. Daha sonra da araştırmaya ilişkin model ve modelin çözümü verilerle sonuçlar değerlendirilmiştir.

7.1. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Araştırmada, bulanık doğrusal programlama modeli ile süt ürünleri üzerine faaliyet gösteren bir fabrikanın günlük ortalama kârını maksimum kılacak ürün ve miktarlarını belirlemek amaçlanmaktadır.

Yoğun rekabet ortamında, işletmenin ayakta kalabilmesi için maksimum kârı sağlayan üretim planını belirlemenin önemi inkar edilemez. Belirsizliklerin

Kısıtlardaki sınırlar ise şöyledir:

İşletmede üç ana ürünün birlikte üretilmesi halinde günlük üretim kapasitesi;

Vakumlu yoğurt üretiminde normal şartlarda ortalama 1,5 ton/gün dür. Talep olması halinde 3 ton/ gün e kadar çıkılabilmektedir.

Köy tipi peynir üretiminde normal şartlarda ortalama 0,6 ton/gün dür. Talep olması halinde 0,9 ton/ gün e kadar çıkılabilmektedir.

Ayran üretiminde normal şartlarda ortalama 1,5 ton/gün dür. Talep olması halinde 3 ton/gün e kadar çıkılabilmektedir.

İşletme vardiyası usulü çalışmaktadır. Günlük üretim için gerekli olan süre tek vardiyaya için 10 saattir. Günlük üretimde artış olması halinde çift vardiyaya çalışılarak hem çalışılan süre hem de üretim iki katına çıkarılmaktadır.

İşletmenin hammaddesi olan çiğ süt işleme kapasitesi 7 ton/gün dür. Maksimum kapasitede çalışıldığında 15 ton/ gün e kadar çıkılabilmektedir.

İşletmenin günlük ortalama vakumlu yoğurt ve ayran üretimi için kullandığı starter kültür (yoğurt mayası) 50 kg/ gün dür. Yoğurt ve ayran üretiminin maksimum kapasitede üretilmesi halinde bu miktar 100 kg/gün dür.

İşletmenin günlük ortalama köy tipi peynir üretimi için kullandığı peynir mayası 1,2 kg/gün dür. Köy tipi peynir üretiminin maksimum kapasitede üretilmesi halinde bu miktar 1,8 kg/gün olacaktır.

İşletmenin günlük ortalama köy tipi peynir üretimi için kullandığı kalsiyum miktarı 1,5 kg/gün dür. Köy tipi peynir üretiminin maksimum kapasitede üretilmesi halinde bu miktar 2,250 kg/gün olacaktır.

İşletmenin günlük ortalama köy tipi peynir ve ayran üretimi için kullandığı tuz miktarı 39 kg/gün dür. Köy tipi peynir ve ayran üretiminin maksimum kapasitede üretilmesi halinde bu miktar 73 kg/gün olacaktır.

7.4. Bulanık Doğrusal Programlama Modelinin Kurulması ve Çözümü

Uygulamadaki değişken sayısı 7 olup, değişkenler şu şekilde tanımlanmıştır. X_1 : 1500 gramlık vakumlu yoğurt, X_2 : 2500 gramlık vakumlu yoğurt, X_3 : 4500 gramlık vakumlu yoğurt, X_4 : 10000 gramlık vakumlu yoğurt, X_5 : 5000 gramlık köy tipi peynir, X_6 : 15000 gramlık köy tipi peynir, X_7 : 200 gramlık ayran.

Amaç fonksiyonu:

İşletme toplam kârını maksimize etmeyi hedeflediği için amaç fonksiyonu maksimizasyon tiplidir. Amaç fonksiyonunda değişkenlerin katsayılarını ürünlerin birim kâr değerleri oluşturmaktadır. Buna göre amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\text{Max } Z = 0,33x_1 + 0,51x_2 + 0,87x_3 + 1,88x_4 + 3,5x_5 + 10,5x_6 + 0,035x_7$$

Kısıtlar:

1. Vakumlu yoğurt toplam üretim miktarı

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq B_1$$

2. Köy tipi peynir toplam üretim miktarı

$$x_5 + x_6 \leq B_2$$

3. Ayran toplam üretim miktarı

$$x_7 \leq B_3$$

4. Vakumlu yoğurt toplam iş süresi

$$1,37x_1 + 2,26x_2 + 4,06x_3 + 9x_4 \leq B_4$$

5. Köy tipi peynir toplam iş süresi

$$5,10x_5 + 15,28x_6 \leq B_5$$

6. Ayran toplam iş süresi

$$0,036x_7 \leq B_6$$

7. Süt miktarı

$$2564x_1 + 4274x_2 + 7692x_3 + 17094x_4 + 27778x_5 + 83333x_6 + 140x_7 \leq B_7$$

8. Starter kültür mayası miktarı

$$37,5x_1 + 62,5x_2 + 112,5x_3 + 250x_4 + 5x_7 \leq B_8$$

9. Peynir mayası miktarı

$$10x_5 + 30x_6 \leq B_9$$

10. Kalsiyum miktarı

$$12,5x_5 + 37,5x_6 \leq B_{10}$$

11. Tuz miktarı

$$250x_5 + 750x_6 + 1,2x_7 \leq B_{11}$$

ve

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Problemin çözümünde Werners yaklaşımından yararlanılmıştır. Werners yaklaşımında kısıtlayıcıların üyelik fonksiyonları karar verici tarafından belirlenebilmesine rağmen, kısıtlayıcıların bulanık olmasından ötürü, bulanık olarak algılanan amaç fonksiyonuna ilişkin üyelik fonksiyonu, karar verici tarafından önceden belirlenemez. Uygulamada da amaç fonksiyonuna ilişkin üyelik fonksiyonu karar verici tarafından belirlenmemiştir.

B_i bulanık sayıların gösterimi için aşağıdaki matematiksel ifadeden yararlanılmaktadır.

$$B_i(x) = \begin{cases} 1 & ; x \leq b_i \\ \frac{b_i + p_i - x}{p_i} & ; b_i \leq x \leq b_i + p_i \\ 0 & ; x \geq b_i + p_i \end{cases}$$

Uygulamada karar verici tarafından bulanık amacın hedefine yönelik bir bilgi verilmemiştir. Çözüm için öncelikle Z^0 ve Z^1 değerlerini belirlemek gerekmektedir. Z^0 , toleransın 0 olduğu yani kullanılmadığı minimum amacı, Z^1 ise toleransın tam olarak kullanıldığı maksimum amacı ifade eder. Z^0 ve Z^1 değerleri amaç fonksiyonunun alt ve üst sınırları şeklinde de ifade edilebilir.

Alt sınırlar aşağıdaki gibi ifade edilir.

Amaç fonksiyonu:

$$\text{Max } Z^0 = 0,33x_1 + 0,51x_2 + 0,87x_3 + 1,88x_4 + 3,5x_5 + 10,5x_6 + 0,035x_7$$

Kısıtlar:

1. Vakumlu yoğurt toplam üretim miktarı

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1500000$$

2. Köy tipi peynir toplam üretim miktarı

$$x_5 + x_6 \leq 600000$$

3. Ayran toplam üretim miktarı

$$x_7 \leq 1500000$$

4. Vakumlu yoğurt toplam iş süresi

$$1,37x_1 + 2,26x_2 + 4,06x_3 + 9x_4 \leq 600$$

5. Köy tipi peynir toplam iş süresi

$$5,10x_5 + 15,28x_6 \leq 600$$

6. Ayran toplam iş süresi

$$0,036x_7 \leq 600$$

7. Süt miktarı

$$2564x_1 + 4274x_2 + 7692x_3 + 17094x_4 + 27778x_5 + 83333x_6 + 140x_7 \leq 7000000$$

8. Starter kültür mayası miktarı

$$37,5x_1 + 62,5x_2 + 112,5x_3 + 250x_4 + 5x_7 \leq 50000$$

9. Peynir mayası miktarı

$$10x_5 + 30x_6 \leq 1200$$

10. Kalsiyum miktarı

$$12,5x_5 + 37,5x_6 \leq 1500$$

11. Tuz miktarı

$$250x_5 + 750x_6 + 1,2x_7 \leq 39000$$

ve

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

WinQSB paket programı yardımı ile model çözüldüğünde Z^0 değeri,

$$Z^0 = 557,7711$$

olarak bulunur.

Üst sınırlar aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\text{Max } Z^1 = 0,33x_1 + 0,51x_2 + 0,87x_3 + 1,88x_4 + 3,5x_5 + 10,5x_6 + 0,035x_7$$

Kısıtlar:

1. Vakumlu yoğurt toplam üretim miktarı

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3000000$$

2. Köy tipi peynir toplam üretim miktarı

$$x_5 + x_6 \leq 900000$$

3. Ayran toplam üretim miktarı

$$x_7 \leq 3000000$$

4. Vakumlu yoğurt toplam iş süresi

$$1,37x_1 + 2,26x_2 + 4,06x_3 + 9x_4 \leq 1200$$

5. Köy tipi peynir toplam iş süresi

$$5,10x_5 + 15,28x_6 \leq 1200$$

6. Ayran toplam iş süresi

$$0,036x_7 \leq 1200$$

7. Süt miktarı

$$2564x_1 + 4274x_2 + 7692x_3 + 17094x_4 + 27778x_5 + 83333x_6 + 140x_7 \leq 15000000$$

8. Starter kültür mayası miktarı

$$37,5x_1 + 62,5x_2 + 112,5x_3 + 250x_4 + 5x_7 \leq 100000$$

9. Peynir mayası miktarı

$$10x_5 + 30x_6 \leq 1800$$

10. Kalsiyum miktarı

$$12,5x_5 + 37,5x_6 \leq 2250$$

11. Tuz miktarı

$$250x_5 + 750x_6 + 1,2x_7 \leq 73000$$

ve

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

WinQSB paket programı yardımı ile model çözüldüğünde Z^1 değeri,

$$Z^1 = 1114,8420$$

olarak bulunur.

Amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{eğer } c^T x > Z^1 \text{ ise} \\ 1 - \frac{Z^1 - c^T x}{Z^1 - Z^0} & ; \text{eğer } Z^0 \leq c^T x \leq Z^1 \text{ ise} \\ 0 & ; \text{eğer } c^T x > Z^0 \text{ ise} \end{cases}$$

Buna göre uygulamanın amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{eğer } c^T x > 1114,8420 \text{ ise} \\ 1 - \frac{1114,8420 - c^T x}{557,0709} & ; \text{eğer } 711 \leq c^T x \leq 1114,8420 \text{ ise} \\ 0 & ; \text{eğer } c^T x > Z^0 \text{ ise} \end{cases}$$

Burada bulanık doğrusal programlama probleminin klasik doğrusal programlama modeli gibi çözülebilmesi için sağ taraf sabitleri yalnız bırakılır. Son olarak aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned} (Bx)_i + \lambda p_i &\leq b_i + p_i \\ \text{Max } \lambda & \\ 0,33x_1 + 0,51x_2 + 0,87x_3 + 1,88x_4 + 3,5x_5 + 10,5x_6 + 0,035x_7 - 557,0709\lambda &\geq 557,711 \end{aligned}$$

Kısıtlar:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1500000\lambda \leq 3000000$$

$$x_5 + x_6 + 300000\lambda \leq 900000$$

$$x_7 + 1500000\lambda \leq 3000000$$

$$1,37x_1 + 2,26x_2 + 4,06x_3 + 9x_4 + 600\lambda \leq 1200$$

$$5,10x_5 + 15,28x_6 + 600\lambda \leq 1200$$

$$\begin{aligned}
&0,036x_7+600\lambda\leq 1200 \\
&2564x_1+4274x_2+7692x_3+17094x_4+27778x_5+83333x_6 \\
&+140x_7+8000000\lambda\leq 15000000 \\
&37,5x_1+62,5x_2+112,5x_3+250x_4+5x_7+50000\lambda\leq 100000 \\
&10x_5+30x_6+600\lambda\leq 1800 \\
&12,5x_5+37,5x_6+750\lambda\leq 2250 \\
&250x_5+750x_6+1,2x_7+34000\lambda\leq 73000
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\
&\lambda \in [0,1]
\end{aligned}$$

Werners yaklaşımına göre optimal sonuca ulaşmak için eşit üyelik dereceli olan çözüm uzayının α -kesim kümesinin, bulanık karar kümesi olarak ele alınması gerekmektedir. Burada $\alpha=1$ dir. Eşit üyelik dereceli çözüm uzayında $\lambda=0,5$ değerinde olur. Buna göre model aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned}
&\text{Max } \lambda \\
&0,33x_1+0,51x_2+0,87x_3+1,88x_4+3,5x_5+10,5x_6+0,03 \\
&5x_7 \geq 536,3066
\end{aligned}$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 2250000 \\
&x_5+x_6 \leq 750000 \\
&x_7 \leq 2250000 \\
&1,37x_1+2,26x_2+4,06x_3+9x_4 \leq 900 \\
&5,10x_5+15,28x_6 \leq 900 \\
&0,036x_7 \leq 900 \\
&2564x_1+4274x_2+7692x_3+17094x_4+27778x_5+8333 \\
&3x_6+140x_7 \leq 11000000 \\
&37,5x_1+62,5x_2+112,5x_3+250x_4+5x_7 \leq 75000 \\
&10x_5+30x_6 \leq 1500 \\
&12,5x_5+37,5x_6 \leq 1875 \\
&250x_5+750x_6+1,2x_7 \leq 56000
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\
&\lambda \in [0,1]
\end{aligned}$$

WinQSB paket programı yardımı ile elde edilen çözüm değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
&\lambda=0,5, \quad x_1=656,9343, \quad x_2=0, \quad x_3=0, \quad x_4=0, \quad x_5=0, \\
&x_6=58,9005, \quad x_7=30,3665
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Buna göre } \text{MaxZ}^*=0,33x_1+0,51x_2+0,87x_3+1,88x_4 \\
&+3,5x_5+10,5x_6+0,035x_7 \\
&=0,33*(656,9343)+ \\
&0,51*(0)+0,87*(0)+1,88*(0)+3,5*(0) \\
&+10,5*(58,9005)+0,035*(30,3665)
\end{aligned}$$

MaxZ*=836,306 olarak bulunur.

Nitekim bu sonuca aşağıdaki formülden de ulaşılabilir;

$$\mu_0(x)=\lambda \text{ ise}$$

$$1 - \frac{1114,8420 - c^T x}{557,0709} = 0,5$$

$c^T x=836,306$ olarak bulunur.

8. Sonuç

Bulanık doğrusal programlama modeli, kısıtların kesin olarak belirlenemediği, amaç ve kısıtların bir takım ihlaller içerdiği durumlarda optimal çözümü bulmada hızlı, esnek ve etkili bir yöntemdir.

Bu çalışmada uygulamanın yapıldığı işletme, amaç fonksiyonuna yönelik bir tolerans vermemiş, sadece kısıtlarla ilgili tolerans değerleri vermiştir. Bu nedenle işletme verilerinden hareketle oluşturulan modelin çözümünde, bulanık doğrusal programlama çözüm yaklaşımlarından Wernes Yaklaşımı kullanılmıştır. Werners yaklaşımına göre, optimal sonuca ulaşmak için eşit üyelik dereceli olan çözüm uzayının α -kesim kümesinin, bulanık karar kümesi olarak ele alınması gerekmektedir. Buna göre optimal çözüm değerleri α nın 0,5 olduğu noktadadır. Bu durum göz önüne alınarak amaç fonksiyonunun alt ve üst sınırları yani minimum ve maksimum değerleri elde edilmiş ve amaç fonksiyonu toleransı belirlenmiştir.

İşletme 2008 yılında bir günde 1500 gramlık vakumlu yoğurttan 12 adet, 2500 gramlık vakumlu yoğurttan 35 adet, 4500 gramlık vakumlu yoğurttan 145 adet, 10000 gramlık vakumlu yoğurttan 36 adet, 5000 gramlık köy tipi peynirden 5 adet, 15000 gramlık köy tipi peynirden 15 adet, 200 gramlık ayrandan ise 266 adet üreterek günlük yaklaşık 400 TL kar elde etmiştir.

Çözüm sonucunda ise, söz konusu firmanın aylık ortalama verilerinden yola çıkarak günlük kârını maksimum kılacak ürünlerin hangileri olduğu ve bunlardan ne kadar üretilmesi gerektiği belirlenmiştir. Buna göre, firmanın kârını maksimum yapabilmesi için günde, 1500 gramlık vakumlu yoğurttan 657 adet, 15000 gramlık köy tipi peynirden 59 adet, 200 gramlık ayrandan 30 adet üretmelidir. Böylelikle firmanın günlük maksimum kârı 836,306 TL olacaktır.

Bu sonuca göre, firma günlük üretim kapasitesini, hammadde miktarını ve toplam iş süresini en iyi şekilde kullandığı takdirde günlük kârını bu günkü durumun yaklaşık iki katına çıkarabilme imkanına sahiptir. Bunun için de işletmenin yukarıda çözüm sonucu belirlenen ürün tiplerini ve miktarlarını dikkate alarak üretimine devam etmesi daha uygun olacaktır.

KAYNAKLAR

- Aydın, N.(2007). Katı Atık Yönetiminde Optimal Planlama İçin Bulanık Doğrusal Programlama Yaklaşımı, Basılmamış yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Baykal, N. ve T. Beyan(2004). Bulanık Mantık İlke ve Temelleri, Ankara: Bıçaklar Kitabevi.
- Bellman, Zadeh.(1970). "Decision Making in A Fuzzy Environment", Management Science, 17(4), 141-164.
- Bojadziej, G. And M. Bojadziej(1995). Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications, London: World Scientific.
- Buckley, J. J. and T. Feuring(2000). "Evolutionary Algorithm Solution to Fuzzy Problems: Fuzzy Linear Programming", Fuzzy Sets and Systems, 109(1), 35-53.
- Chanas, S. and P. Zielinski(2000). "On the Equivalence of Two Optimization Methods for the F u z z y Linear Programming Problems", European Journal of Operational Research, 121(1), 56-63.
- Chanda, R. S. and P. K. Bhattacharjee(2004). Transmission Expansion Plannig: A Fuzzy Linear Programming Based Approach", IE(I) Journal- EL, 84, 114-119.
- Chiang, J.(2001). "Fuzzy Linear Programming Based on Statistical Confidence Intervial and Intervial-Valued Fuzzy Set", European Journal Operational Research, 129,65-86.
- Darby-Dowman, K., C. Lucas, G. Mitra and J. Yadegar(1986) "Linear, Integer, Eperable and Fuzzy Programming Problems: A Unified Approach Towards Reformulation", The Journal of Operation Research Society, 39(2).
- Dubois, D. and H. Prade(1980). Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Boston: Academic Press.
- Guu, S. M. and Y. K. Wu(1999). "Two Phase Approach for Solving the Fuzzy Linear Programming Problems", Fuzzy Sets and Systems, 107(29), 191-195.
- Hacısalıhoğlu-Çelik, S.(2000). Bulanık Rasgele Doğrusal Programlama, Basılmamış Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Hansen, B. K.(1996). Fuzzy Logic and Linear Programming Find Optimal Solutions for Meteorological Problems, Term Paper for Fuzzy Coursa at Technical University of Nova Scotia.
- Inuiguchi., M. and M. Sakawa(1998). "Robust Optimization under Softness in a Fuzzy Linear Programming Problem", International Journal of Approximate Reasoning, 18, 21-34..
- Karadayı, T.(2007). Bulanık doğrusal programlama kullanılarak yapısal sistemlerin boyutlandırılması, Basılmamış yüksek lisans tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Kaya, Ö.(2007). Bulanık Doğrusal Programlama ve Üretim Planlama Üzerine Bir Uygulama, Basılmamış yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Lai, Y. J. and C. L. Hwang(1994). Fuzzy Multi Objective Decision Making Method and Applications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Özkan, M. M.(2002). Bulanık Doğrusal Programlama ve Bir Tekstil İşletmesinde Uygulama Denemesi, Basılmamış Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.
- Özkan, M. M. (Fall 2002-2003). "Bulanık Hedef Programlama Modeli ve Bir Uygulama Denemesi", Review of Social, Economic and Business Studies, 2, 265-301.
- Özkan, M. M.(2003). Bulanık Hedef Programlama. Bursa: Ekin Kitabevi.
- Paksoy, T.(2002), "Bulanık Küme Teorisi ve Doğrusal Programlamada Kullanımı: Karşılaştırmalı Bir Analiz", Selçuk Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi, Cilt: 17, No:1.
- Rocacher, D. and P. Bose(2005). "The Set Of Fuzzy Rational Numbers and Flexiable Querying", Fuzzy Sets and Systems 155(3), 317-339.
- Rommelfanger, H. et al(1989). "Linear Programming with Fuzzy Objectives", Fuzzy Sets and Systems, 29, 31-48.
- Ross, T. J.(2005). Fuzzy Logic with Engineering Applications, New York: Mc Graw-Hill.
- Tirantis, K. and G. Olivier(1998). "A Mathematical Programming Approach for Measuring Technical Efficiency in A Fuzzy Enviroment", Journal of Productivity Analysis 10. Kluwer Academic Publishers, 85-102.
- Tuş, A.(2006). Bulanık doğrusal programlama ve üretim planlamasında bir uygulama örneği, Basılmamış Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.
- Ural, G. F.(2006). Bulanık Doğrusal Programlama Yöntemi Kullanılarak Bir Sanayi Kuruluşunda Üretim Planlama Çalışmasının Gerçekleştirilmesi, Basılmamış yüksek lisans tezi, Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.
- Wang, D.(1997). "An Inexact Approach for Linear Programming Problems with Fuzzy Objective and Resources", Fuzzy Sets and Systems, 89(1), 61-68.
- Wang, R. C. and T. F. Liang(2004). "Application of Fuzzy Multi- Objective Linear Programming to Aggregate Production Planning", Computers & Industrial Engineering, 46, 17-41.
- Yalçın-Seçme, N.(2005). Klasik Doğrusal Programlama ve Bulanık Doğrusal Programlamanın Karşılaştırılması Bir Analizi: Üretim Planlama Örneği, Basılmamış Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

- Zhang, G. et al(2003). "Formulation of Fuzzy Linear Programming Problems as Four-Objective Constarined Optimization Problems", Applied Mathematics and Computation, 139, 383-399.
- Zimmerman, H. J.(1991). Fuzzy Set Theory and Its Applications, Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.